Grundlagen der Rechnerarchitektur und Betriebssysteme

Zahlen

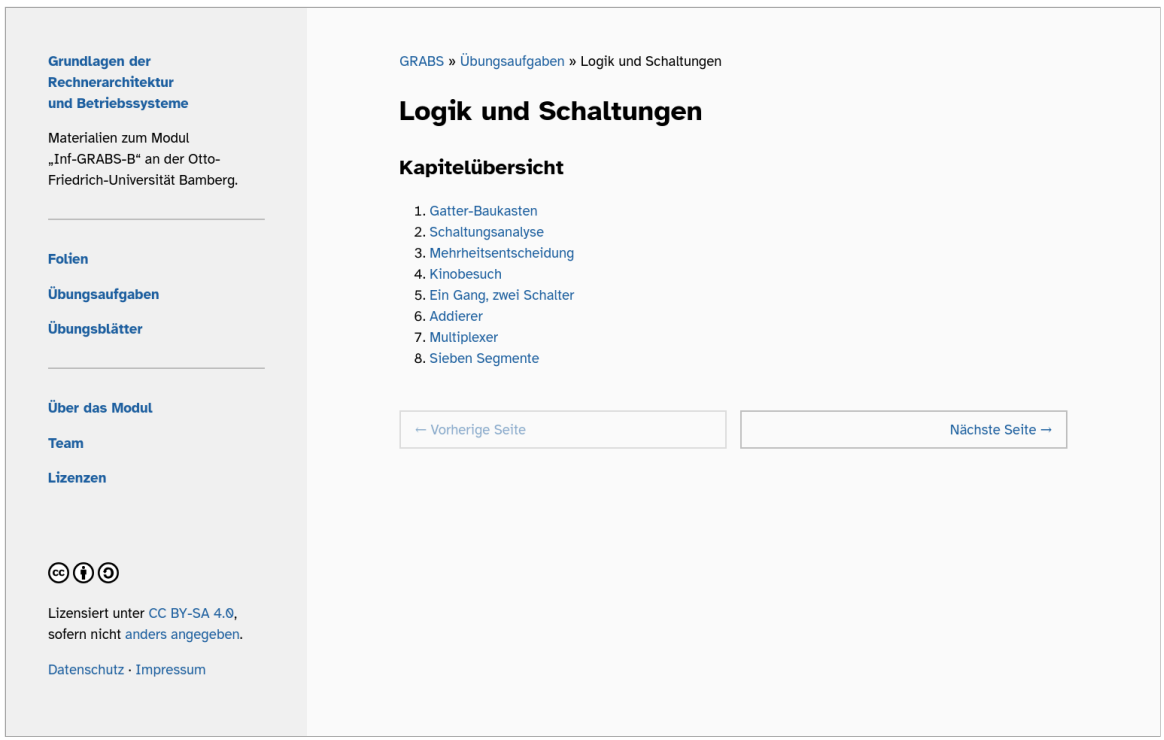
Florian Knoch · Lehrstuhl für Praktische Informatik,
insbes. Systemnahe Programmierung, Universität Bamberg

Organisatorisches

Kursmaterialien

grabs.sysnap.uni-bamberg.de

- **online** verfügbar
- **Übungsblätter** werden im Laufe der Woche veröffentlicht
- **Lösungen** zu den Aufgaben eines Übungsblattes folgen, sobald das letzte Tutorium damit fertig ist
- **Fragen** gern per Mail



Addierer

Addierer

Halbe Sachen?

AUFGABE 1A

Ein Halbaddierer verarbeitet zwei Eingangssignale `X` und `Y` zu einem Summensignal `S` und einem Übertrag `C_out`. Erstellen Sie eine Wertetabelle.

AUFGABE 1B

Rekonstruieren Sie den Schaltplan für einen Halbaddierer. Nutzen Sie die IEC-Notation.

IEC-Notation

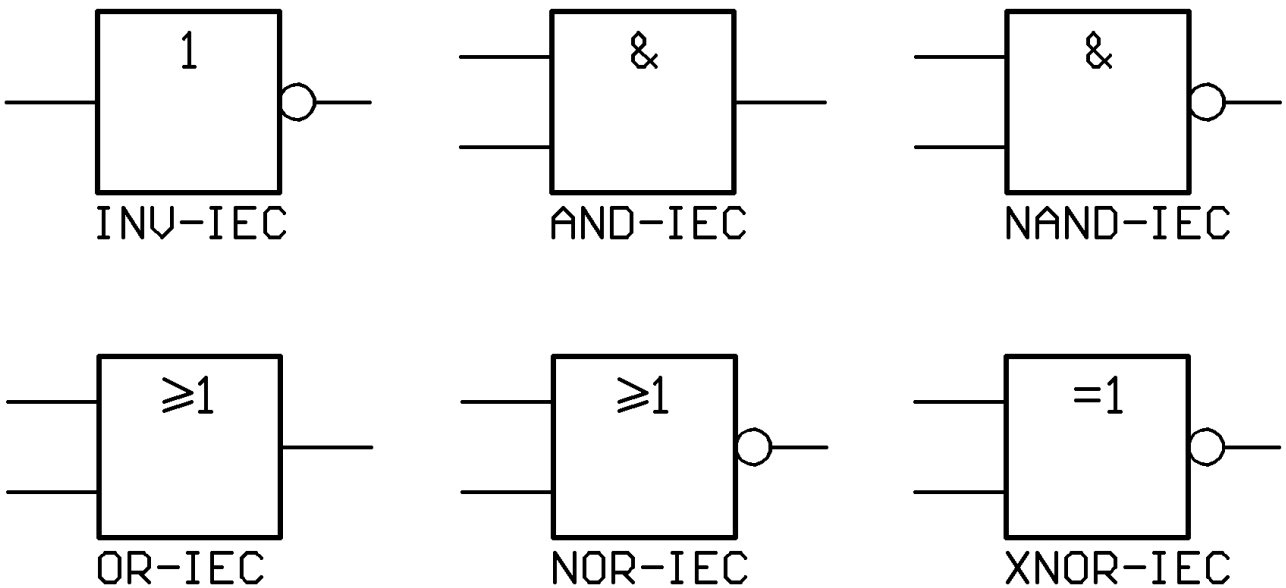


Abbildung 1: Logische Gatter in IEC-Notation

Addierer

Ganze Sachen!

AUFGABE 2A

Ein Volladdierer nimmt zusätzlich zu den Eingabebits `X` und `Y` den Übertrag `C_in` entgegen. Erstellen Sie eine Wertetabelle für dieses Bauteil.

AUFGABE 2B

Rekonstruieren Sie den Schaltplan für einen Volladdierer.

Zahlendarstellung

Vorzeichenbehaftete Ganzzahlen

Komplementdarstellung

AUFGABE 3

Stellen Sie die Zahlen 23_{10} und -38_{10} als vorzeichenbehaftete 8-Bit-Ganzzahlen im Einerkomplement, Zweierkomplement und Exzess-Code ($b = 2^{l-1}$) dar.

Gleitkommazahlen

nach **Standard IEEE 754-2008**

Representations of floating-point data in the binary interchange formats are encoded in k bits in the following three fields ordered as shown in Figure 3.1:

a) 1-bit sign S

b) w-bit biased exponent $E = e + bias$

c) $(t = p - 1)$-bit trailing significand field digit string $T = d_1 d_2 \ldots d_{p-1}$; the leading bit of the significand, d_0, is implicitly encoded in the biased exponent E.

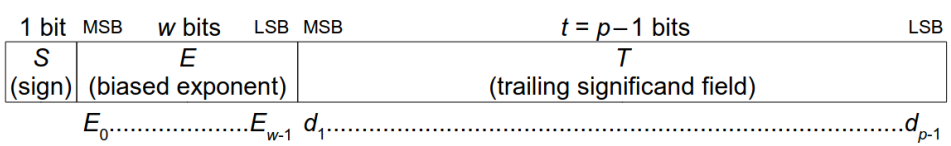


Figure 3.1—Binary interchange floating-point format

Abbildung 2: Auszug aus dem Standard IEEE 754-2008 [1]

Gleitkommazahlen

nach **Standard IEEE 754-2008**

Präzision	Gesamtlänge	Vorzeichen (v)	Exponent (e)	Mantisse (m)
single[1]	32	1	8	23
double	64	1	11	52

$$(-1)^v \times (1 + m) \times 2^{e-b}$$

[1] Wir betrachten für den Rest dieses Foliensatzes ausschließlich dieses Format.

Gleitkommazahlen

nach **Standard IEEE 754-2008**

$$(-1)^v \times (1+m) \times 2^{e-b}$$

v	e	m
0	0111 1111	0000 0000 0000 0000 0000 000

Gleitkommazahlen

nach **Standard IEEE 754-2008**

$$(-1)^v \times (1+m) \times 2^{e-b}$$

v	e	m
0	0111 1111	0000 0000 0000 0000 0000 000

$$(-1)^0 \times (1+0) \times 2^{127-127}$$

Gleitkommazahlen

nach **Standard IEEE 754-2008**

$$(-1)^v \times (1+m) \times 2^{e-b}$$

v	e	m
0	0111 1111	0000 0000 0000 0000 0000 000

$$(-1)^0 \times (1+0) \times 2^{127-127}$$

$$= (-1)^0 \times (1+0) \times 2^0$$

Gleitkommazahlen

nach **Standard IEEE 754-2008**

$$(-1)^v \times (1+m) \times 2^{e-b}$$

v	e	m
0	0111 1111	0000 0000 0000 0000 0000 000

$$(-1)^0 \times (1+0) \times 2^{127-127}$$

$$= (-1)^0 \times (1+0) \times 2^0$$

$$= 1 \times 1 \times 1 = 1$$

Gleitkommazahlen

nach **Standard IEEE 754-2008**

$$(-1)^v \times (1+m) \times 2^{e-b}$$

v	e	m
0	0111 1110	0000 0000 0000 0000 0000 000

Gleitkommazahlen

nach **Standard IEEE 754-2008**

$$(-1)^v \times (1+m) \times 2^{e-b}$$

v	e	m
0	0111 1110	0000 0000 0000 0000 0000 000

$$(-1)^0 \times (1+0) \times 2^{126-127}$$

Gleitkommazahlen

nach **Standard IEEE 754-2008**

$$(-1)^v \times (1+m) \times 2^{e-b}$$

v	e	m
0	0111 1110	0000 0000 0000 0000 0000 000

$$(-1)^0 \times (1+0) \times 2^{126-127}$$

$$= (-1)^0 \times (1+0) \times 2^{-1}$$

Gleitkommazahlen

nach **Standard IEEE 754-2008**

$$(-1)^v \times (1+m) \times 2^{e-b}$$

v	e	m
0	0111 1110	0000 0000 0000 0000 0000 000

$$(-1)^0 \times (1+0) \times 2^{126-127}$$

$$= (-1)^0 \times (1+0) \times 2^{-1}$$

$$= 1 \times 0.5 \times 1 = 0.5$$

Gleitkommazahlen

nach **Standard IEEE 754-2008**

$$(-1)^v \times (1+m) \times 2^{e-b}$$

v	e	m
1	1000 0100	0101 0000 0000 0000 0000 000

Gleitkommazahlen

nach **Standard IEEE 754-2008**

$$(-1)^v \times (1+m) \times 2^{e-b}$$

v	e	m
1	1000 0100	0101 0000 0000 0000 0000 000

$$(-1)^1 \times (1+0.3125) \times 2^{132-127}$$

Gleitkommazahlen

nach **Standard IEEE 754-2008**

$$(-1)^v \times (1+m) \times 2^{e-b}$$

v	e	m
1	1000 0100	0101 0000 0000 0000 0000 000

$$(-1)^1 \times (1+0.3125) \times 2^{132-127}$$

$$= (-1)^1 \times (1+0.3125) \times 2^5$$

Gleitkommazahlen

nach **Standard IEEE 754-2008**

$$(-1)^v \times (1+m) \times 2^{e-b}$$

v	e	m
1	1000 0100	0101 0000 0000 0000 0000 000

$$(-1)^1 \times (1+0.3125) \times 2^{132-127}$$

$$= (-1)^1 \times (1+0.3125) \times 2^5$$

$$= -1 \times 0.3125 \times 32 = -42$$

Gleitkommazahlen

nach **Standard IEEE 754-2008**

$$(-1)^v \times (1+m) \times 2^{e-b}$$

- gewisse Werte sind vordefiniert
- **NaN** steht für *Not a Number*
- **denormalisiert** bedeutet, dass m nicht implizit +1 entspricht

v	e	m	Bedeutung
0	$\overline{1}$	0	$+\infty$
1	$\overline{1}$	0	$-\infty$
v	$\overline{1}$	$\neq 0$	NaN
0	0	0	$+0$
1	0	0	-0
v	0	$\neq 0$	denormalisiert

Gleitkommazahlen

nach **Standard IEEE 754-2008**

$$(-1)^v \times (1+m) \times 2^{e-b}$$

v	e	m	DENORMALISIERT[2]
1	0000 0000	0010 0000 0000 0000 0000 000	

[2] da $e = 0$ und $m \neq 0$, es wird daher $e = 1$ angenommen

Gleitkommazahlen

nach **Standard IEEE 754-2008**

$$(-1)^v \times (1+m) \times 2^{e-b}$$

v	e	m	DENORMALISIERT[3]
1	0000 0000	0010 0000 0000 0000 0000 000	

$$(-1)^1 \times 0.125 \times 2^{1-127}$$

[3] da $e = 0$ und $m \neq 0$, es wird daher $e = 1$ angenommen

Gleitkommazahlen

nach **Standard IEEE 754-2008**

$$(-1)^v \times (1+m) \times 2^{e-b}$$

v	e	m	DENORMALISIERT[4]
1	0000 0000	0010 0000 0000 0000 0000 000	

$$(-1)^1 \times 0.125 \times 2^{1-127}$$

$$= (-1)^1 \times 1.4693... \times 10^{-39}$$

[4] da $e = 0$ und $m \neq 0$, es wird daher $e = 1$ angenommen

Gleitkommazahlen

nach **Standard IEEE 754-2008**

$$(-1)^v \times (1+m) \times 2^{e-b}$$

v	e	m	DENORMALISIERT[5]
1	0000 0000	0010 0000 0000 0000 0000 000	

$$(-1)^1 \times 0.125 \times 2^{1-127}$$

$$= (-1)^1 \times 1.4693... \times 10^{-39}$$

$$\approx -1,46 \times 10^{-39}$$

[5] da $e = 0$ und $m \neq 0$, es wird daher $e = 1$ angenommen

Obacht: Wahr oder falsch?

Fallstricke bei Gleitkommazahlen [2]

```c
float f = … // Assume never NaN
if (f == -(-f))
  printf("true\n");
else
  printf("false\n");
```

Obacht: Wahr oder falsch?

Fallstricke bei Gleitkommazahlen [2]

```c
float f = … // Assume never NaN
if (f == -(-f))
  printf("true\n");
else
  printf("false\n");
```

Garantiert wahr.

Die Negation beeinflusst lediglich das Vorzeichenbit und ist verlustfrei.

Obacht: Wahr oder falsch?

Fallstricke bei Gleitkommazahlen [2]

```c
float f = … // Assume never NaN
if (f == -(-f))
  printf("true\n");
else
  printf("false\n");
```

```c
float f, d = … // Assume never NaN
if ((d + f) - d == f)
  printf("true\n");
else
  printf("false\n");
```

Garantiert wahr.

Die Negation beeinflusst lediglich das Vorzeichenbit und ist verlustfrei.

Obacht: Wahr oder falsch?

Fallstricke bei Gleitkommazahlen [2]

```c
float f = … // Assume never NaN
if (f == -(-f))
  printf("true\n");
else
  printf("false\n");
```

Garantiert wahr.
Die Negation beeinflusst lediglich das Vorzeichenbit und ist verlustfrei.

```c
float f, d = … // Assume never NaN
if ((d + f) - d == f)
  printf("true\n");
else
  printf("false\n");
```

Möglicherweise falsch.
Der Ausdruck `d + f` könnte ∞ ergeben.

Obacht: Wahr oder falsch?

Fallstricke bei Gleitkommazahlen [2]

```
// Assume never NaN, f < ∞, d > 0
float f, d = …
if ((f + d) > f)
  printf("true\n");
else
  printf("false\n");
```

Obacht: Wahr oder falsch?

Fallstricke bei Gleitkommazahlen [2]

```
// Assume never NaN, f < ∞, d > 0
float f, d = …
if ((f + d) > f)
  printf("true\n");
else
  printf("false\n");
```

Möglicherweise falsch.
Informationsverlust bei Addition, falls Exponenten von `f` und `d` an unterschiedlichen Enden des Wertebereiches.

Obacht: Wahr oder falsch?

Fallstricke bei Gleitkommazahlen [2]

```c
// Assume never NaN, f < ∞, d > 0
float f, d = …
if ((f + d) > f)
  printf("true\n");
else
  printf("false\n");
```

```c
float f = …
if (f == f)
  printf("true\n");
else
  printf("false\n");
```

Möglicherweise falsch.

Informationsverlust bei Addition, falls Exponenten von `f` und `d` an unterschiedlichen Enden des Wertebereiches.

Obacht: Wahr oder falsch?

Fallstricke bei Gleitkommazahlen [2]

```c
// Assume never NaN, f < ∞, d > 0
float f, d = …
if ((f + d) > f)
  printf("true\n");
else
  printf("false\n");
```

Möglicherweise falsch.
Informationsverlust bei Addition, falls Exponenten von `f` und `d` an unterschiedlichen Enden des Wertebereiches.

```c
float f = …
if (f == f)
  printf("true\n");
else
  printf("false\n");
```

Möglicherweise falsch.
Der Ausdruck `f == f` kann zu `false` ausgewertet werden, falls `f == NaN`.

Fragen?

Literatur

[1] „IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic“, *IEEE Std 754-2008*, Nr. , S. 1–70, 2008, doi: **10.1109/IEEESTD.2008.4610935**.

[2] D. Goldberg, „What every computer scientist should know about floating-point arithmetic“, *ACM Comput. Surv.*, Bd. 23, Nr. 1, S. 5–48, März 1991, doi: **10.1145/103162.103163**.

Lizenzhinweise

Kursmaterialien · **Quelltext**

Diese Präsentation wurde zuletzt am 30.04.2026 bearbeitet. Sie basiert auf den Folien der zugehörigen Vorlesung von Prof. Dr. Michael Engel. Sofern nicht anders angegeben, sind die Inhalte unter der **Lizenz CC BY-SA 4.0** verfügbar. Das Universitätslogo sowie die Schriftart UB Scala Sans sind Eigentum der Otto-Friedrich-Universität Bamberg.

Folgende **Open-Source-Komponenten** sind Teil der Präsentation:
typst (Apache 2.0), **typst-ccicons** (MIT), **typst-polylux** (MIT), **fontawesome** (SIL).